Κεφαλαιο
5

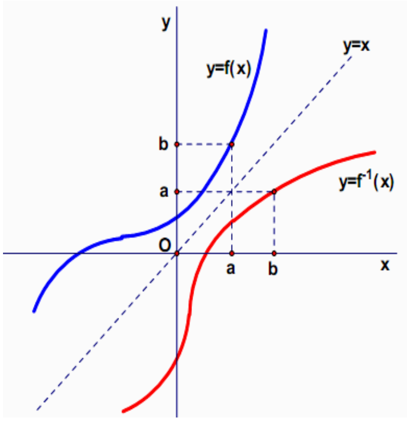
5. Αντίστροφη συνάρτηση

Ο Απειροστικός Λογισμός είναι το προϊόν μιας δραματικής επιστημονικής αναζήτησης η οποία διήρκεσε περίπου 250 χρόνια
RICARD COURANT

Ορισμός : Αντίστροφη μιας «1-1» συναρτήσεως $f: A \to f(A)$ θα ονομάζουμε μία συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \to A$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$, για το οποίο ισχύει $f(x) = y$

Γενικά ισχύει : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Παρατηρήσεις



- Για να έχει αντίστροφη μία συνάρτηση πρέπει να είναι ¨1-1¨ (f αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow$ f "1-1")
- Το $D_{f^{-1}} = \Pi T_f$ και το $\Pi T_{f^{-1}} = D_f$
- Η f μπορεί να έχει αντίστροφη ακόμη και αν δεν είναι γνησίως μονότονη, αρκεί να είναι ¨1-1¨.
- Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη , τότε η f δεν είναι 1 - 1
- Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$
- **Βασικές σχέσεις:** $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ και $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ και $f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = f(x)$

Μεθοδολογία:

Για να δείξουμε ότι μία συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να δείξουμε ότι είναι ¨1-1¨

Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης επιλύουμε τον τύπο της f ως προς x, και λαμβάνουμε υπόψη τους περιορισμούς για το x

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της f με την f^{-1}:

Α) <u>αν f είναι γνησίως αύξουσα</u> λύνουμε την εξίσωση $f(x) = x$ ή την $f^{-1}(x) = x$ ή την $f(x) = f^{-1}(x)$

Β) <u>αν f δεν είναι γνησίως αύξουσα</u> λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$y = f(x) \text{ και } y = f^{-1}(x) \quad \text{με } x \in D_f \cap D_{f^{-1}}$$

- Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου ελέγχουμε αν ο κάθε τύπος αποτελεί ¨1-1¨συνάρτηση και μετά αν τα σύνολα τιμών τους δεν έχουν κοινά σημεία.

Τα κοινά σημεία δύο αντίστροφων συναρτήσεων θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$, *αν η f είναι γνησίως αύξουσα*

<u>Αντίστροφη και Περιττή</u>

Δίνεται η συνάρτηση f:R→R η οποία είναι περιττή και αντιστρέψιμη. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή. (άσκηση 14 Μπάρλας Α τόμος σελίδα 145)

Λύση

$f(x) = -f(-x) = y \quad x \in R,\ y \in f(R) = R$

Τώρα $\quad y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \quad x, y \in R$ (1)

$$y = -f(-x) \Leftrightarrow -y = f(-x) \Leftrightarrow f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) \Leftrightarrow f^{-1}(-y) = -x \quad x, y \in R (2)$$

Από την (1) και (2) έχω : $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y) \quad x, y \in R$ άρα η f^{-1} είναι περιττή στο R

Αντίστροφη και άρτια

Προφανώς αν μια συνάρτηση είναι άρτια δεν υπάρχει η αντίστροφή της αφού:
$-x \neq x \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$,$\forall x \in R$ διαφορετικά πρότυπα έχουν την ίδια εικόνα ,άρα δεν είναι 1-1 , δηλαδή δεν υπάρχει η αντίστροφη.

Αντίστροφη και Μονοτονία

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη: Έστω μία συνάρτηση f: A→R η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο A.
Αν η αντίστροφη f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε θα υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε:
$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 \geq y_2$, άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $y_1 < y_2$.
Επομένως η αντίστροφη μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης είναι γνησίως αύξουσα.
Όμοια αποδεικνύεται η πρόταση και για γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Αντίστροφη Συνάρτηση και Όριο $\lim\limits_{y \to x_0} f^{-1}(x)$

Δίνεται η συνάρτηση $f:(a,\beta) \to (\gamma,\delta) \quad a,\beta,\gamma,\delta \in R \cup \{+\infty,-\infty\}$ που είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται: $f^{-1}:(\gamma,\delta) \to (a,\beta)$ Αν υποθέσουμε ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** άρα 1-1 δηλαδή υπάρχει η αντίστροφη η f^{-1} και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f , δηλαδή $f^{-1} \uparrow \ \forall x \in (\gamma,\delta)$

Με την υπόθεση ότι η $f^{-1} \uparrow$ και συνεχής θα έχω : $\lim\limits_{x \to \gamma^+} f^{-1}(x) = a \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim\limits_{x \to \delta^-} f^{-1}(x) = \beta$

Όμοια αν $f^{-1} \downarrow$ και συνεχής θα έχω : $\lim\limits_{x \to \gamma^+} f^{-1}(x) = \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim\limits_{x \to \delta^-} f^{-1}(x) = a$

Αντίστροφη Συνάρτηση και συνέχεια

α) Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι 1-1, συνεχής με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και σύνολο τιμών το R, τότε και η αντίστροφή της είναι κι αυτή συνεχής

Η απόδειξη εκτός ύλης

Δηλαδή αν το γράφημα μιας συνάρτησης είναι συνεχές, τότε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης είναι κι αυτό συνεχές

Αντίστροφη Συνάρτηση και Παράγωγος

Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta \to R$, $y = f(x)$ που είναι αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη στο Δ . Αν $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Delta$ τότε ισχύει : $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Απόδειξη (Με το συμβολισμό Leibniz)

Έστω ότι $\quad y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Τότε $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(y) = \dfrac{dx}{dx} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y)\dfrac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) f'(x) = 1$ και επειδή $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Delta$

Θα έχω $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Απόδειξη (Με το συμβολισμό Lagrange)

Έστω ότι $y=f(x)\Rightarrow f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))=x\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

Τότε $\left(f^{-1}(y)\right)'=(x)'\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(y)y'=1\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(y)f'(x)=1$ και επειδή $f'(x)\neq 0\quad\forall x\in\Delta$

Θα έχω $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

Απόδειξη (Με τον ορισμό της παραγώγου)

Ισχύει ότι $f'(x)\neq 0\quad\forall x\in\Delta\Rightarrow f'(x_0)\neq 0$ άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\neq 0\quad(1)$

Τότε $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}\quad(2)$

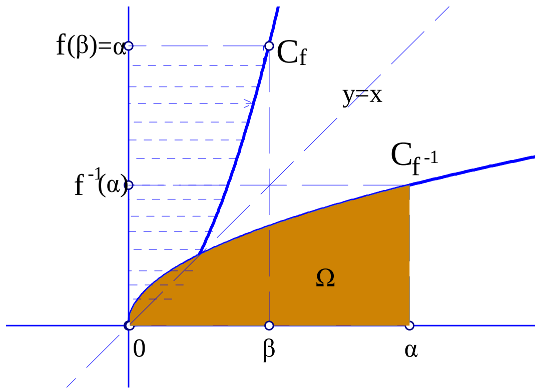
Θέτουμε $f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow y=f(x)$ και όταν $y\to y_0\Rightarrow f^{-1}(y)\to f^{-1}(y_0)$ $\delta\eta\lambda$ $x\to x_0$

Έτσι από τη σχέση (2) θα έχουμε :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Αντίστροφη συνάρτηση και Ολοκλήρωμα

Χωρίο που ορίζεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f $^{-1}$



• Το εμβαδό του χωρίου Ω μεταξύ $C_{f^{-1}}$, χ΄χ και x=α είναι ίσο με το εμβαδό μεταξύ των C_f , y΄y και y=α (λόγω συμμετρίας των $C_{f^{-1}}$, C_f ως προς την ευθεία y=x) Επομένως θα είναι:

• $E(\Omega)=\int_0^{\alpha} f^{-1}(x)dx = \int_0^{\beta}[\alpha-f(x)]dx$ (όπου f(β)=α)

Άσκηση 1 (Μπάρλας ασκ 9 σελ 361)

Δίνεται η συνάρτηση f(x)= e^x+x-1

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

β) Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της f $^{-1}$

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου μεταξύ της C f $^{-1}$, και τις ευθείες x=0 ,x=e

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση f(x)=x^5+x^3+x

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , τα κοίλα και να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

β) Να δείξετε ότι f(e^x)≥f(1+x) , για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f $^{-1}$