Κεφαλαιο 3

3. Ειδικά θεωρήματα Συνέχεια

Ι ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Με το θεώρημα του Bolzano (Θ. Bolzano) εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ρίζας σε μια συνάρτηση.
ΔΕΝ βρίσκουμε την ρίζα.
Προϋποθέσεις είναι η **συνέχεια** της συνάρτησης και οι **ετερόσημες ακραίες τιμές**.

Γεωμετρική ερμηνεία

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_o μεταξύ των α και β

Συνέπειες Θ.Bolzano

1η ΣΥΝΕΠΕΙΑ Θ.Bolzano

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ΄ ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό , τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε χ∈Δ ή είναι αρνητική για κάθε χ∈Δ

Η διατύπωση αυτή πολλές φορές μας επιτρέπει να βρούμε τη συνάρτηση.

2η ΣΥΝΕΠΕΙΑ Θ.Bolzano

Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το Πεδίο ορισμού της.

1η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ **Εύρεση κοινού σημείου δύο συναρτήσεων. Τα κοινά σημεία δύο συναρτήσεων f και g είναι στις ρίζες της εξίσωσης f(x)=g(x).**

2η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ **Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) \neq 0$ τότε η f δεν αλλάζει πρόσημο σε ολόκληρο το Δ.**

3η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ **Αν μια συνάρτηση , όπως έχει οριστεί , δεν ορίζεται σε κάποιο άκρο , τότε μετασχηματίζουμε την αρχική εξίσωση απαλείφοντας τους ανεπιθύμητους παρανομαστές**

Άσκηση 1 Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^7+8x=7$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

1) **Βαφτίζουμε την εξίσωση συνάρτηση** $f(x)=2x^7+8x-7$ (όλα στο α' μέλος)

2) **Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την f** στο [0,1].

δηλαδή εξετάζουμε αν είναι συνεχής και αν $f(0)f(1)<0$.

Άσκηση 2 Δίδονται οι συναρτήσεις f ,g που είναι συνεχείς στο [α,β] . Αν f(α)> g(α) και f(β)< g(β) , να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε : $f(\xi)= g(\xi)$

Λύση

$f(\xi)= g(\xi) \Leftrightarrow f(\xi)- g(\xi)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $h(x)= f(x)- g(x) \quad x \in [\alpha,\beta]$ και εφαρμόζουμε το Θ.Bolzano για την h(x)

Άσκηση 3 Δίνεται η συνάρτηση f :[0,2π] → R που είναι συνεχής στο [0,2π] και για την οποία ισχύει f(0)=f(2π). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2\pi)$, ώστε $f(\xi)=f(\xi+\pi)$

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-f(x+\pi)$ στο διάστημα [0,2π]

ΠΡΟΣΟΧΗ !!! η g(x) ορίζεται στο [0,π] διότι : πρέπει $\chi\in[0,2\pi]$ και $\chi+\pi\in[0,2\pi]$ μετά από συναλήθευση $\chi\in[0,\pi]$

- Η f είναι συνεχής στο [0,2π] , άρα και στο [0,π].
- Η x +π είναι πολυωνυμική , άρα συνεχής στο R , άρα και στο [0,π]. Η σύνθεση συνεπώς ,η f(x+π) είναι συνεχής στο [0,π]

Τέλος ο γραμμικός συνδυασμός f(x)-f(x+π) ,δηλαδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [0,π]

Ακόμα είναι :

- $g(0)=f(0)-f(0+\pi)=f(0)-f(\pi)$
- $g(\pi)=f(\pi)-f(\pi+\pi)=f(\pi)-f(2\pi)=f(\pi)-f(0)$

Επομένως :

$g(0)g(\pi)=[f(0)-f(\pi)][f(\pi)-f(0)]=-[f(0)-f(\pi)]^2$

Έτσι λοιπόν σύμφωνα με το θεώρημα **Bolzano –Weirstrass** υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ ώστε $g(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)-f(\xi+\pi)=0\Rightarrow f(\xi) = f(\xi+\pi)$

Άσκηση 4: (Άσκηση 52 Μπάρλας σελ 262)!!!!!!

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:R→R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f(1)=-2. Να βρείτε το $\lim_{x\to-\infty}\left[(f(2)-1)x^3+5x-1\right]$

Λύση

Αφού f(1)=-2 και $f(x)\neq 0$ τότε η f είναι κάτω από τον άξονα , άρα f(x)<0 δηλαδή f(2)-1<0

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(f(2)-1)x^3+5x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[(f(2)-1)x^3\right]=+\infty$$

Άσκηση 5: **Δίνεται συνεχής συνάρτηση f :R→R για την οποία ισχύει ότι:** $x^3f^2(x)-2x^5f(x)=-x^2+x-1$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$.

1) Να βρεθεί το f(1) ,

2) Να αποδειχθεί ότι f(x)>0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:
Για x=1 στην παραπάνω σχέση θα πάρουμε:

$$f^2(1) - 2f(1) = -1+1-1 \Rightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0$$

$$\left(f(1)-1\right)^2 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$$

2) Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θα χρησιμοποιήσουμε το εξής θεώρημα:
Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι f(1)=1>0. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \neq 0$ στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι f(x)=0, τότε από τη σχέση θα πάρουμε ότι:

$-x^2 + x - 1 = 0$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης και βλέπουμε ότι είναι αρνητική. Δηλαδή η δευτεροβάθμια εξίσωση δεν έχει ρίζες. Άρα δεν γίνεται να ισχύει f(x)=0 για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $f(x) \neq 0$ κι άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο

<u>Άσκηση 6</u> Δίνεται η συνεχής και αύξουσα συνάρτηση f με f(0)=5 και f(1)=6. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει <u>ακριβώς ένα</u> κοινό σημείο με την $y=5x^2-x+4$.

Λύση

Στην περίπτωσή μας η εξίσωση θα είναι $f(x)= 5x^2-x+4$.
Θ.Bolzano λοιπόν για την $h(x)= f(x)-5x^2+x-4$ στο [0,1].

Η μοναδικότητα της ρίζας εξασφαλίζεται με την μονοτονία της συνάρτησης,

<u>Προσοχή όταν μας ζητούν την ύπαρξη</u> $x_0 \in [\alpha,\beta)$, Δείτε την παρακάτω άσκηση !!

<u>Άσκηση 7</u> Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ = [0, 1] και ισχύει $-1 < f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in [0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)^2 + f(x_0) + x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (f(x))^2 + f(x) + x$, $x \in [0, 1]$.

- Η συνάρτηση h(x) είναι συνεχής στο [0, 1] ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $(f(x))^2$, $f(x)$ και x.
- $h(0) = (f(0))^2 + f(0) = f(0)\cdot(f(0)+1) \leq 0$, αφού για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $-1 < f(x) \leq 0$.
- $h(1) = (f(1))^2 + f(1) + 1 > 0$ αφού είναι $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$. .

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

i) Αν f(0) = 0, τότε $(f(0))^2 + f(0) = 0$ και συνεπώς $x_0 = 0$.

ii) Αν f(0) < 0, τότε $h(0)h(1) < 0$ και σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0 \in (0, 1)$ με $h(x_0) = 0$.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε: $(f(x_0))^2 + f(x_0) + x_0 = 0$

1) Εύρεση του τύπου της συνάρτησης f

Παράδειγμα (άσκηση 59 Μπάρλας σελ 263)

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [-2,2] για την οποία ισχύει : $x^2+f^2(x)=4 \quad x\in[-2,2]$

i) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης f(x)=0
ii) Να δείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα (-2,2)
iii) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f;
iv) Αν f(1)=- $\sqrt{3}$ να βρείτε την f

2) Εύρεση πρόσημου της συνάρτησης f από όριο

Παράδειγμα (άσκηση 76 Μπάρλας σελ 265)

Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x\eta\mu\frac{1}{x}=1$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

Λύση Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2x\eta\mu\frac{1}{x}-1$ Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της στο διάστημα $(0,+\infty)$ αφού ψάχνομε μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

1) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

2)
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(2\frac{\eta\mu u}{u}-1\right)=(2.0-1)=-1<0$$

Άρα f(x)<0 Κοντά στο μηδέν

3)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{u\to 0}\left(2\frac{\eta\mu u}{u}-1\right)=(2.1-1)=+1>0$$

Άρα f(x)>0 Κοντά σε μια περιοχή του $+\infty$. Δηλαδή η γραφική παράσταση θα τέμνει τουλάχιστον μία φορά τον άξονα των xx΄

Το 0 ανήκει στο Π.Τ άρα σύμφωνα με Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών , θα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ του πεδίου ορισμού ώστε f(ξ)=0

****

ΙΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Γεωμετρική ερμηνεία

Η ευθεία y = n όπου n μεταξύ των f (α) και , f(β) τέμνει τη γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.

Παράδειγμα 1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{16}-\eta\mu\pi x+7$ Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει την τιμή $\frac{7}{2}$ στο [-4,4]

Λύση

Εδώ εξετάζουμε τρεις προϋποθέσεις:
α) Η συνάρτηση να είναι **συνεχής** στο [-4,4].
β) Τα f(-4) και f(4) να είναι **διαφορετικά**.
γ) Ο αριθμός 7/2 να βρίσκεται **ανάμεσα** στα f(-4) και f(4).
Τότε υπάρχει ξ στο (-4,4) ώστε f(ξ)=7/2.

Παράδειγμα 2 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f ώστε f(1)= -2, f(2)=6 και f(3)= -7. Να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Παράδειγμα 3 Αν f συνεχής στο R, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, $f(2005)=\frac{1}{2}$, $f(2007)=3$ και f(1) f(2) = f(3) f(4) να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ∈R ώστε f(ξ) = 1.

ΛΥΣΗ

- Η f είναι συνεχής στο [2005, 2007]
- $\frac{1}{2}=f(2005)\neq f(2007)=3$
- Ο αριθμός 1 είναι μεταξύ των f(2005) και f(2007) άρα ισχύει το **θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών,** οπότε θα υπάρχει $\xi\in(2005\ ,2007\ )\subseteq R$ ώστε f(ξ) = 1.

Άλλη λύση με Bolzano
Θεωρώ τη συνάρτηση g(x)= f(x)- 1 , εφαρμόζω το Θ.Bolzano στο [2005,2007]

****

ΙΙΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Παράδειγμα 2 Έστω f συνεχής στο [0,4]. Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο (0,4) ώστε
$9f(x_0)=2f(1)+3f(2)+4f(3)$.
Προσοχή όμως ! Το διάστημα να είναι κλειστό. Τότε όλες οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται ανάμεσα στο ελάχιστο m και στο μέγιστο Μ. κ.λ.π.

$2m \leq 2f(1) \leq 2M$
$3m \leq 3f(2) \leq 3M$ +
$4m \leq 4f(3) \leq 4M$

$9m \leq 9f(x_0) \leq 9M \quad \Leftrightarrow \quad m \leq f(x_0) \leq M$

****

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Το σύνολο τιμών είναι η προβολή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης στον άξονα y’y.

Για την εύρεση του συνόλου τιμών είναι απαραίτητη **η μονοτονία!!,** γιατί οι ακραίες τιμές του πεδίου ορισμού δεν δίνουν τις ακραίες τιμές του συνόλου τιμών.

Εύρεση συνόλου τιμών

Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το ***σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το*** [α,β] είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

•Κατά συνέπεια:

— Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα **κλειστό** διάστημα [α,β], τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα **[f(α),f(β)].**

— Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$.

— Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** σε ένα **κλειστό** διάστημα [α,β], τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα **[f(β),f(α)].**

— Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x))$.

Παράδειγμα 1

Να Βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

Α) f(x)=2x+1 , αν $x \in A = [-2, 3]$

Β) g(x)= x^2 , αν $x \in A = [-2, 3]$

Γ) h(x)= - x^2 , αν $x \in A = [-2, 3]$

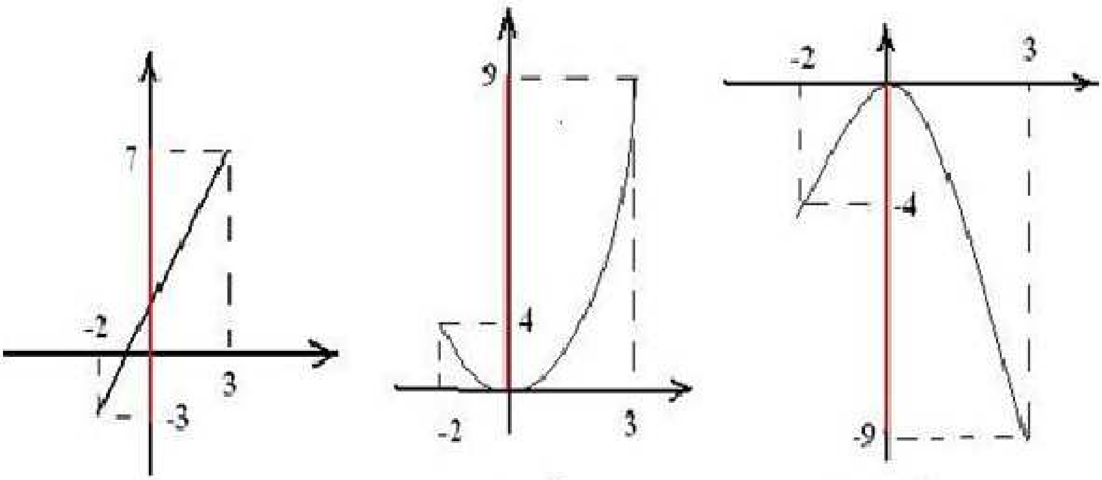
Απάντηση

Α) Η f είναι αύξουσα άρα f(A)=[f(-2),f(3)]=[-3,7]

Β) Μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο για τη g ? Δηλαδή g(A)=[4,9] ; Όχι

Γ) Μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο για τη h ? Δηλαδή h(A)=[-4,-9] ; Όχι

Δείτε τις γραφικές παραστάσεις για να καταλάβετε.



$f(x)=2x+1$ $f(A)=[-3,7]$ $g(x)=x^2$ $g(A)=[0,9]$ $h(x)=-x^2$ $h(A)=[-9,0]$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$ στο $A=[0,2]$. Να δείξετε ότι είναι αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

$0 \le x \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0^2 \le x^2 \le 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le x^2+1 \le 5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le f(x) \le 5$

άρα $f(A)=[1,5]$

Παράδειγμα 3

Έστω η $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$

i) Να δείξετε ότι είναι αύξουσα
ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της
iii) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x+e^{x-1}=1$.

Λύση

Πρέπει $x>0$, δηλαδή Π.Ο=(0 , +00)

Μελέτη ως προς μονοτονία : εύκολα γνησίως αύξουσα

Εδώ το σύνολο τιμών θα βρεθεί με όρια:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\ \text{Άρα}\ f(A)=R$$

Επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα τέμνει μια φορά τον x'x, άρα έχει μία μόνο προφανή ρίζα την x=1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [-\alpha,\alpha] \to [-\alpha,\alpha]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [-\alpha,\alpha]$, ώστε $f(\xi)=\xi$

ΘΕΜΑ 2ο Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{\alpha}{x-\gamma}+\dfrac{\beta}{x-\delta}=0$ $\mu\varepsilon\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in R$ α>0 ,β>0 και γ<δ . Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει μια μόνο λύση στο (γ,δ)

ΘΕΜΑ 3ο Να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3+\alpha\chi^2+\beta=0$ με β>0 και α+β+1<0 , έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-1,1)

ΘΕΜΑ 4ο Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$ με α<β και αβ>0 . Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, ώστε $\xi f(\xi)=\alpha\beta$

ΘΕΜΑ 5ο Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f : R\to(-\infty,1)$ και $g : R\to(1,+\infty)$. Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί με α<β και f(α)=α , g(β)=β. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)g(\xi)=\xi$

ΘΕΜΑ 6ο Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,1]\to R$ και $g:[0,1]\to R$, τέτοιες ώστε $f(0)=g(1)$, $f(1)=g(0)$ και $g(0)\neq g(1)$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$, ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

ΘΕΜΑ 7ο Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, η οποία δεν μηδενίζεται για καμία τιμή $\chi\in[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$

ΘΕΜΑ 8ο Δείξτε ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού, δέχεται τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα

ΘΕΜΑ 9ο Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=0$ (1). Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[\alpha,\beta]$, ώστε $f(\xi)=0$

ΘΕΜΑ 10ο Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,4]$, και γνησίως μονότονη με $f(0)=7$ και $f(4)=1$

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=\alpha$, όπου $\alpha\in[0,7]$, έχει μία μόνο λύση στο $[0,4]$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,4)$, τέτοιος ώστε :

$$f(\xi)=\frac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$$

ΘΕΜΑ 11ο Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\chi^2+\beta\chi+\gamma$ και $g(\chi)=-\chi^2+\beta\chi+\gamma$ $(\gamma\neq 0)$. Αν ρ είναι ρίζα της f, ξ είναι η ρίζα της g με $\rho<\xi$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa\in(\rho,\xi)$, ώστε $f(k)=-2g(k)$

ΘΕΜΑ 12ο Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ η οποία είναι συνεχής. Έστω $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\ldots\ldots.\chi_\kappa$, σημεία του $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots\ldots\ldots f(x_k)}{k}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Λύση θέματος 1

Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x$ στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$

- Η g είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ από την υπόθεση
- Η x είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο Ε., άρα και στο $[-\alpha,\alpha]$

Τέλος η διαφορά $f(x)-\chi$, δηλαδή η συνάρτηση g είναι συνεχής συνάρτηση στο $[-\alpha,\alpha]$

Ακόμα είναι

- $g(-\alpha)=f(-\alpha)-(-\alpha)=f(-\alpha)+\alpha\geq 0$, διότι :

$-a\leq f(\chi)\leq\alpha$, για κάθε $\chi\in[-\alpha,\alpha]$ και για $\chi=-\alpha$ παίρνουμε
$-\alpha\leq f(-\alpha)\leq\alpha \Rightarrow f(-\alpha)+\alpha\geq 0$

- $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=f(\alpha)-\alpha\leq 0$, διότι

$-\alpha\leq f(x)\leq\alpha$, για κάθε $\chi\in[-\alpha,\alpha]$ και για $x=\alpha$ παίρνουμε
$-\alpha\leq f(\alpha)\leq\alpha \Rightarrow f(\alpha)-\alpha\leq 0$

Επομένως $g(-\alpha)g(\alpha)\leq 0$ Άρα

- Αν g(-α)g(α) =0 $\Leftrightarrow \begin{cases} g(-a)=0 \Rightarrow f(-a)+a=0 \Rightarrow f(-a)=-a \text{ άρα } \xi=-\alpha \\ g(a)=0 \Rightarrow f(a)-a=0 \Rightarrow f(a)=a \text{ άρα } \xi=\alpha \end{cases}$

- Αν g(-α)g(α)<0 , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano –Weirstrass υπάρχει $\xi \in (-\alpha,\alpha)$ ώστε g(ξ)=0 $\Rightarrow$ f(ξ)- ξ=0$\Rightarrow$ f(ξ) = ξ

ΛΥΣΗ θέματος 2

Με $\chi \neq \delta$ και $\chi \neq \delta$ η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση α(χ-δ)+β(χ-γ)=0
Θεωρούμε την συνάρτηση f με f(x)= α(χ-δ)+β(χ-γ) στο διάστημα [γ,δ]

- Η f συνεχής στο [γ,δ] σαν πολυωνυμική

Ακόμα είναι :

- f(γ)=α(γ-δ)+β(γ-γ)=α(γ-δ)<0 , αφού α>0 και γ<δ
- f(δ)=α(δ-δ)+β(δ-γ)=β(δ-γ)>0 , αφού β>0 και δ>γ

Επομένως f(γ) f(δ)<0 και σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\gamma,\delta)$ ώστε f(ξ)=0

$$\Rightarrow \alpha(\xi-\delta)+\beta(\xi-\gamma)=0 \Rightarrow \frac{\alpha(\xi-\delta)+\beta(\xi-\gamma)}{(\xi-\delta)(\xi-\gamma)}=0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\xi-\gamma}+\frac{\beta}{\xi-\delta}=0 \quad (1)$$

Έστω τώρα , ότι η f έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1,ρ_2 στο (γ,δ) με $\rho_1 \neq \rho_2$. Τότε

- $\gamma<\rho_1<\rho_2<\delta$, και (2)
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)$ (αφού ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της f) (3)

Όμως f(χ)=α(χ-δ)+β(χ-γ)=(α+β)χ-(αδ+βγ) και επειδή α+β>0 η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα , δηλαδή $\rho_1<\rho_2 \Rightarrow f(\rho_1)<f(\rho_2)$ άτοπο λόγω της (3)

Λύση θέματος 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(χ)= $\chi^3+\alpha\chi^2+\beta$ στα διαστήματα [-1,0] και [0,1]

- Η f είναι συνεχής σαν πολυωνυμική , επομένως θα είναι συνεχής και στα υποδιαστήματα [-1,0] και [0,1]

Ακόμα είναι :

- $f(-1)=(-1)^3+\alpha(-1)^2+\beta=-1+\alpha+\beta<0$ (1) ,διότι $\alpha+\beta+1<0 \Rightarrow \alpha+\beta-1<-2<0$
- $f(1)=1^3+\alpha 1^2+\beta=1+\alpha+\beta<0$ (2)
- $f(0)=0^3+\alpha 0^2+\beta=\beta>0$ (3)

Επομένως :

√ f(-1)f(0)<0 , άρα σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει $\xi_1 \in (-1,0)$ ώστε $f(\xi_1)=0$ (4)

√ f(0)f(1)<0 , άρα σύμφωνα με θ.Bolzano υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ ώστε $f(\xi_2)=0$ (5)

Συνεπώς στο διάστημα (-1,1) η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες

Λύση θέματος 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με g(x)=xf(x)-αβ στο διάστημα [α,β]

- Η f είναι συνεχής στο [α,β] από την υπόθεση
- Η χ είναι πολυωνυμική , άρα συνεχής στο R, άρα και στο [α,β] . Δηλαδή η χf(x) είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β]
- Η αβ είναι συνεχής σαν σταθερή στο R, άρα και στο [α,β]

Τέλος ο γραμμικός συνδυασμός xf(x)-αβ , δηλαδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [α,β]

Ακόμα είναι :

- $g(\alpha)=\alpha f(\alpha)-\alpha\beta=\alpha[f(\alpha)-\beta]\leq 0$, διότι : $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε $\chi \in[\alpha,\beta]$ άρα και για χ=α , παίρνομε $\alpha \leq f(\alpha) \leq \beta \Rightarrow f(\alpha)-\beta \leq 0$ (1)
- $g(\beta)=\beta f(\beta)-\alpha\beta=\beta[f(\beta)-\beta]\geq 0$, διότι : $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε $\chi \in[\alpha,\beta]$ άρα και για χ=β , παίρνομε $\alpha \leq f(\beta) \leq \beta \Rightarrow f(\beta)-\alpha \geq 0$ (2)

Επομένως $g(\alpha)\, g(\beta) \leq 0$. Άρα

√ Αν $g(\alpha)\, g(\beta)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha f(a)-a\beta=0 \Rightarrow \alpha f(\alpha)=\alpha\beta \ \alpha\rho\alpha \ \xi=\alpha \\ g(\beta)=0 \Rightarrow \beta f(\beta)-\alpha\beta=0 \Rightarrow \beta f(\beta)=\alpha\beta \ \alpha\rho\alpha \ \xi=\beta \end{cases}$

√ Αν $g(\alpha)g(\beta)<0$, τότε σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g(\xi)=0 \Rightarrow \xi f(\xi)-\alpha\beta=0\Rightarrow \xi f(\xi)=\alpha\beta$

Λύση θέματος 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με h(x)=f(x)g(x)-x στο διάστημα [α,β]

- Η f είναι συνεχής στο R (από την υπόθεση) , άρα και στο [α,β]
- Η g είναι συνεχής στο R (από την υπόθεση), άρα και στο [α,β]
- Η x είναι συνεχής σαν πολυωνυμική στο R ,άρα και στο [α,β]

Άρα η συνάρτηση h(x) συνεχής στο [α,β]

Ακόμα είναι :

- $h(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)-\alpha=\alpha g(\alpha)-\alpha=\alpha[g(a)-1]>0$, (1) διότι : α>0 και g(α)>1 ,αφού g(χ)>1 για κάθε $\chi\in R$
- $h(\beta)=f(\beta)g(\beta)-\beta=\beta f(\beta)-\beta=\beta[f(\beta)-1]<0$, (2) διότι : β>0 και f(β)<1 ,αφού f(χ)<1 για κάθε $\chi\in R$

Επομένως $h(\alpha)h(\beta)<0$. Άρα σύμφωνα με **θ. Bolzano** υπάρχει $\xi \in(\alpha,\beta)$ ώστε $h(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)g(\xi)-\xi=0 \Rightarrow f(\xi)g(\xi)=\xi$

Λύση του θέματος 6

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με h(χ)=f(x)- g(x) στο διάστημα [0,1]

- Η f είναι συνεχής στο [0,1] (από την υπόθεση)
- Η g είναι συνεχής στο [0,1] (από την υπόθεση)

Άρα η συνάρτηση h(x) =f(x)- g(x) συνεχής στο διάστημα [0,1

Ακόμα είναι :

- h(0) =f(0) - g(0)=g(1)-g(0)
- h(1) =f(1) - g(1)=g(0)-g(1)

Επομένως : $h(0)h(1)=-[g(1)-g(0)]^2<0$, άρα σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει ξ ∈(0,1) ώστε h(ξ)=0 ⇒f(ξ) - g(ξ)=0 ⇒ f(ξ) = g(ξ)

Λύση του θέματος 7

Από την υπόθεση είναι f(x)≠0 , για κάθε χ∈[α,β] (1)

Υποθέτουμε ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β]

Επομένως υπάρχουν χ_1,χ_2 ∈[α,β] (με π.χ $\chi_1<\chi_2$), τέτοια ώστε $f(\chi_1)>0$ και $f(x_2)<0$

Θεωρώντας τη συνάρτηση f στο διάστημα [α,β] ,παρατηρούμε :

- Η f είναι συνεχής στο [α,β] , (από την υπόθεση)
- Ακόμα $f(\chi_1)f(x_2)<0$, αρα σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει ξ $\in(x_1,x_2)$ ώστε h(ξ)=0 άτοπο λόγω της (1)

Λύση του θέματος 8

Έστω ότι $f(x)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+........\alpha_0$ με ν=2κ+1, Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) στο R . Προφανώς η f σαν πολυωνυμική είναι συνεχής στο R

Είναι :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(a_\nu x^\nu)=\alpha_\nu \lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu=\begin{cases}+\infty, \alpha_\nu>0\\ -\infty, \alpha_\nu<0\end{cases}$ (1)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(a_\nu x^\nu)=\alpha_\nu \lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu=\begin{cases}-\infty, \alpha_\nu>0\\ +\infty, \alpha_\nu<0\end{cases}$ (2)

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)<0$ (3)

Άρα σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει ξ ∈R ώστε h(ξ)=0 . Δηλαδή η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα

Λύση του θέματος 9

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

Ι) Έστω f(α)=0 ⇒ f(β)=0 άρα $\begin{cases} f(a)=0, \text{Τ}o\zeta\eta\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\nu o\,\xi=\alpha \\ f(\beta)=0, \text{Τ}o\zeta\eta\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\nu o\,\xi=\beta\end{cases}$

ΙΙ) Έστω f(α) $\neq 0$ Επειδή f(α)+f(β)=0 $\Rightarrow$ f(β)=- f(α) $\overset{f(x)\neq 0}{\Rightarrow}$ f(β) $\neq 0$,οπότε : f(α)+f(β)=0$\Rightarrow$ f(α)[f(α)+f(β)]=0$\Rightarrow$ f ^{2}(α)+f(β)f(α)=0 , επειδή f ^{2}(α)>0 θα είναι f(α)f(β)<0 Άρα σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ $\in$(α,β) ώστε f(ξ)=0 .

Λύση του θέματος 10

I) Επειδή για 0<4 $\Rightarrow$f(0)=7>f(4)=1 και επειδή η f γνησίως μονότονη , συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα

II) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με g(χ)=f(χ)-α στο διάστημα [0,4]

- Η g είναι συνεχής στο [0,4] σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο [0,4]
- Ακόμα g(0)=f(0)-α=7-α>0 αφού α $\in$[0,7] g(4)=f(4)-α=1-α<0 Επομένως

g(0)g(4)<0 Άρα σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ $\in$(0,4) ώστε g(ξ)=0 $\Rightarrow$f(ξ)-α=0$\Rightarrow$.f(ξ)=α

Η ρίζα είναι μοναδική αφού η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση f(χ)=α δέχεται δεύτερη ρίζα διαφορετική της ξ στο διάστημα [0,4] (Έστω ρ<ξ) , τότε θα είχαμε f (ρ)=f(ξ)=0 , οπότε : Για ρ<ξ $\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$ f (ρ)>f(ξ) $\Rightarrow$0>0 άτοπο . Επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

III) Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)=9f(x)-f(1)-3f(2)-5f(3) στο διάστημα [0,4]

- Η h είναι συνεχής σαν άθροισμα συνεχών στο [0,4]
- h(0)=9f(0)-f(1)-3f(2)-5f(3)>0 διότι :

$$\begin{cases} 0<1\Rightarrow f(0)>f(1) \\ 0<2\Rightarrow 3f(0)>3f(2)\Rightarrow 9f(0)>f(1)-3f(2)-5f(3) \\ 0<3\Rightarrow 5f(0)>5f(3) \end{cases}$$

h(4)=9f(4)-f(1)-3f(2)-5f(3)<0 διότι :

$$\begin{cases} 4>1\Rightarrow f(4)<f(1) \\ 4>2\Rightarrow 3f(4)<3f(2)\Rightarrow 9f(4)<f(1)-3f(2)-5f(3)4 \\ 4>3\Rightarrow 5f(4)<5f(3) \end{cases}$$

Άρα σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα k $\in$(0,4) ώστε g(k)=0 $\Rightarrow$ 9f(k)-f(1)-3f(2)-5f(3)=0$\Rightarrow$ $f(k)=\frac{f(1)+3f(2)-5f(3)}{9}$. Το σημείο είναι μοναδικό διότι η f στο [0,4] είναι γνησίως φθίνουσα.(απόδειξη όπως παραπάνω)

Λύση του θέματος 11

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με h(χ)=f(x)+2g(x) στο διάστημα [ρ,ξ]

- Η h συνεχής
- h(ρ)=f(ρ)+2g(ρ)=2g(ρ), αφού ρ ρίζα f(ρ)=0

h(ξ)=f(ξ)+2g(ξ)=f(ξ), αφού ξ ρίζα g(ξ)=0

Επομένως : h(ρ) h(ξ) =2g(ρ)f(ξ)=2(-ρ^2+βρ+γ)(ξ^2+βξ+γ) (1)

Όμως το ρ είναι ρίζα της f , άρα f(ρ)=0 $\Rightarrow$ ρ^2+βρ+γ$\Rightarrow$ βρ+γ=- ρ^2 (2)

Όμως το ξ είναι ρίζα της g , άρα g(ξ)=0 $\Rightarrow$ -ξ^2+βξ+γ$\Rightarrow$ βξ+γ= ξ^2 (3)

Η σχέση (1) λόγω των σχέσεων (2) και (3) γράφεται :

h(ρ)h(ξ)=2(-ρ^2- ρ^2)(ξ^2+ ξ^2)= -4 $\rho^2\xi^2$<0 (4)

Άρα σύμφωνα με **θ.Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα k $\in$(ρ,ξ) ώστε
h(k)=0$\Rightarrow$f(k)+2g(k)=0$\Rightarrow$f(k)=-2g(k)

Σημείωση : Στη σχέση 4 δεν μπορεί να είναι -4 $\rho^2\xi^2$=0 διότι θα είχαμε ρ=0 ή ξ=0 και αφού το ρ είναι ρίζα της f , θα είναι f(ρ)=0$\Rightarrow$f(0)=0$\Rightarrow$$0^2$+β.0+γ=0$\Rightarrow$γ=0 άτοπο

Λύση του θέματος 12

Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β] η f θα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
Επομένως
Υπάρχει λ$\in$[α,β] ώστε maxf(x)=M
Υπάρχει ρ$\in$[α,β] ώστε minf(x)=m

$$\text{Έτσι}\begin{cases} m \le f(x_1) \le M \\ m \le f(x_2) \le M \\ m \le f(x_3) \le M \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m \le f(x_k) \le M \end{cases} \Rightarrow km \le f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots.+f(x_k) \le kM \Rightarrow$$

$m \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_k)}{k} \le M$ δηλαδή ο αριθμός $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_k)}{k}$
βρίσκεται μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμης της f στο [α,β] , άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών , θα υπάρχει ξ$\in$[α,β] ώστε f(ξ)= $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_k)}{k}$