Κεφαλαιο 1

1.Μιγαδικοί Αριθμοί

Α. Τι πρέπει να προσέχουμε.

Δυνάμεις του i : $i^{\nu} = i^{4\kappa+\upsilon} = i^{\upsilon} =$ .... , με υ = 0 , 1 , 2 , 3. Τα κ , υ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του ν με το 4.

Μπορείτε να υπολογίσετε μια **μεγάλη δύναμη** ενός μιγαδικού αν μια **μικρή του δύναμη** είναι πολλαπλάσιο του i : $(\alpha+\alpha i)^{2004} = ((\alpha+\alpha i)^2)^{1002} = (2\alpha^2 i)^{1002} = -2^{1002}\cdot\alpha^{2004}$.

Η παράσταση $\alpha^2+\beta^2$ στους μιγαδικούς γίνεται **διαφορά ! τετραγώνων**:
$\alpha^2+\beta^2 = \alpha^2-(i\beta)^2 = (\alpha - i\beta)(\alpha+i\beta)$.

Κάθε πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές αν έχει ρίζα έναν μιγαδικό z_1 τότε θα έχει ρίζα και το συζυγή του $\overline{z_1}$

Η εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma = 0$, με α , β , γ ε R, Δ<0 , έχει ρίζες δύο συζυγείς μιγαδικούς z_1 , z_2 , (ποιες;), με $z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. Οπότε αν z_1 , z_2 ρίζες της εξίσωσης τότε $2Re(z_1) = 2Re(z_2) = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}$.

Προσοχή!! Αν z = α+βi τότε: $z+\bar{z}=2a$ $z-\bar{z}=2\beta i$ και $z\bar{z}=|z|^2=\alpha^2+\beta^2$

Για να δείξουμε ότι ένας μιγαδικός είναι:

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ	ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΣ
Αρκεί να δείξουμε: α) Im(z)=0 β) $z=\bar{z}$ γ) $z^2=\|z\|^2$	Αρκεί να δείξουμε: α) Re(z)=0 β) $z=-\bar{z}$ γ) $z^2=-\|z\|^2$

Προσοχή!! Δεν έχει νόημα στους μιγαδικούς **η ανίσωση**, εκτός αν αυτοί είναι πραγματικοί.

Ένα σημείο του επιπέδου Μ(χ , ψ) είναι ισοδύναμο με τον μιγαδικό z=χ+ψi και λέγεται εικόνα του z.

Το μέτρο ενός μιγαδικού είναι η απόσταση της εικόνας του από την αρχή των αξόνων.

Αν z ένας μιγαδικός τότε:

η εικόνα του –z είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς το Ο.

η εικόνα του $\bar{z}$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον x΄x.

η εικόνα του $-\bar{z}$ είναι συμμετρική της εικόνας του z ως προς τον y΄y.

Οι εικόνες των z , -z , $\bar{z}$, $-\bar{z}$ ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων δηλαδή:

$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

Η απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών είναι ίση με το μέτρο της διαφοράς τους.

Να χρησιμοποιούμε το εξής : $|z|=\rho \Leftrightarrow z\bar{z}=\rho^2 \Leftrightarrow \frac{\rho^2}{z}=\bar{z} \Leftrightarrow \frac{\rho^2}{\bar{z}}=z$, $\rho \neq 0$ π.χ.: $|z|=1$ τότε:
$\frac{1}{z}=\bar{z}$, $\frac{1}{\bar{z}}=z$, $z\bar{z}=1$

Στις πράξεις με μιγαδικούς καλό είναι:

Να μην έχουμε μιγαδικό στον παρονομαστή. Πολλαπλασιάζουμε με τον συζυγή μιγαδικό του παρονομαστή και έτσι **ο παρονομαστής γίνεται πραγματικός και ίσος με το τετράγωνο του μέτρου του.**

Να μην κάνουμε αμέσως αντικατάσταση τον z με χ+ψi , **κάνουμε τις πράξεις.**

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία Α(z_1) , Β(z_2) ,Γ(z_3) είναι κορυφές **ισοπλεύρου τριγώνου** αρκεί να δείξουμε ότι:
$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Προσοχή!! Αν Α(z_1) , Β(z_2) τότε:

Η εξίσωση ως προς z: $|z-z_1|=\rho$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα ρ. Στην περίπτωση αυτή ο μιγαδικοί **z με το ελάχιστο , μέγιστο μέτρο** θα είναι οι μιγαδικοί που είναι **τα σημεία τομής** του κύκλου και της ευθείας ΟΑ.

Αν ο γ.τ είναι ευθεία τότε έχουμε όνο **ελάχιστο μέτρο** και είναι **η απόσταση** του Ο(0,0) από την ευθεία

Η εξίσωση ως προς z: $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$, με $|z_1-z_2|<2\alpha$, παριστάνει **έλλειψη** με εστίες τα σημεία Α, Β μήκος μεγάλου άξονα 2α.

Η εξίσωση ως προς z: $\left||z-z_1|-|z-z_2|\right|=2a$, με $|z_1-z_2|>2\alpha$, παριστάνει **υπερβολή** με εστίες τα σημεία Α, Β απόσταση κορυφών 2α

Η εξίσωση ως προς z: $|z-z_1|=|z-z_2|$ παριστάνει την **μεσοκάθετη** ευθεία του ΑΒ.

Γενικά να ερμηνεύουμε μια παράσταση ή σχέση μέτρων γεωμετρικά γνωρίζοντας τι εκφράζει το μέτρο ενός μιγαδικού καθώς και τι εκφράζει το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών.

Γ. ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ R αι C

ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ R	ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C
1. Έχουμε διάταξη	1. Δεν έχουμε διάταξη
2. Ισχύει $\sqrt{\alpha}=x \Leftrightarrow x^2=a$ x>0, α>0	2. Δεν έχει νόημα το σύμβολο $\sqrt{\ }$
3. $|x| \le \theta \Leftrightarrow -\theta \le x \le \theta$, θ>0	3. Δεν ισχύει
4. $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$	4. Δεν ισχύει
5. $x = \theta \Leftrightarrow x = \pm\theta$	5. Δεν ισχύει
6. $-|x| \le x \le |x|$, $x \in R$	6. Δεν ισχύει
7. $|x|^2 = x^2$ για κάθε $x \in R$	7. Δεν ισχύει. Για κάθε $z \in C$, $|z|^2 = z.\bar{z}$
8. Ορίζονται δυνάμεις με εκθέτη ρητό ή άρρητο	8. Δεν ορίζονται δυνάμεις με εκθέτη άρρητο και δυνάμεις με εκθέτη ρητό έχουν διαφορετικό νόημα(εκτός ύλης)
9. Οι πραγματικοί απεικονίζονται σε άξονα (μια διάσταση)	9. Οι μιγαδικοί απεικονίζονται στο επίπεδο (δύο διαστάσεις)
10. Οι εξισώσεις 2ου βαθμού	10. Οι εξισώσεις 2ου βαθμού έχουν

είναι αδύνατες αν Δ<0	πάντα λύση (αν Δ<0 δύο μιγαδικές συζυγείς)
11. Λύνονται εξισώσεις 1ου βαθμού και συστήματα	11. Ισχύουν τα ίδια όπως και στους πραγματικούς (και η μέθοδος των οριζουσών)
12. Ισχύουν οι ταυτότητες	12. Ισχύουν οι ταυτότητες
13. Ισχύουν τα θεωρήματα των πολυωνύμων, διαιρετότητας και σχήμα Horner στη λύση εξισώσεων	13. Ισχύουν τα ίδια και εργαζόμαστε ομοίως
14. Ισχύουν στις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο οι γνωστές ιδιότητες	14. Ισχύουν ακριβώς οι ίδιες ιδιότητες
15. Αν α,β $\in$R, $\alpha^2+\beta^2=0 \iff \alpha=0$ και $\beta=0$	15. Δεν ισχύει. Ισχύει $z_1^2+z_2^2=0$ χωρίς κανένας από τους z_1, z_2 να είναι μηδέν. π.χ αν $z_1=1+i$ και $z_2=-1+i$.
16. Το άθροισμα $\alpha^2+\beta^2$ δεν παραγοντοποιείται	16. Το άθροισμα $z_1^2+z_2^2$ παραγοντοποιείται και μάλιστα είναι: $z_1^2+z_2^2=(z_1-iz_2)(z_1+iz_2)$ (απόδειξη?)

Η εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, με α , β , γ ε IR, Δ<0 , έχει ρίζες δύο συζυγείς μιγαδικούς z_1 , z_2 με

$$z_1=\frac{-\beta+i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad z_2=\frac{-\beta-i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \quad \text{με} \quad \mathbf{z_1+z_2=-\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{και} \quad \mathbf{z_1\cdot z_2=\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Οπότε αν z_1 , z_2 ρίζες της εξίσωσης τό $\mathbf{2Re(z_1)=2Re(z_2)=-\frac{\beta}{\alpha}}$ και $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$.