2.Συναρτήσεις- όρια - Συνέχεια

Συναρτήσεις –όρια- Συνέχεια

1. Όταν δεν δίνεται το Πεδίο Ορισμού μιας συναρτήσεως το βρίσκουμε .
2. Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται σε κάποιο διάστημα ή σύνολο. Αν γράψουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, πρέπει να αναφέρουμε το διάστημα.
3. Για το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(g(x))$ λαμβάνουμε υπ' όψιν ότι $x \in D_g$ ώστε $g(x) \in D_f$.
4. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η σύνθεση της g με την f, δηλαδή η fog, είναι γνησίως αύξουσα. (Απόδειξη εύκολη).
5. Αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η σύνθεση της g με την f, δηλαδή η fog, είναι γνησίως φθίνουσα. (Απόδειξη εύκολη).
6. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε θα είναι και «1 – 1» οπότε θα ορίζεται η αντίστροφή της και επίσης : **κάθε εξίσωση της μορφής** $f(x) = k$ **θα έχει το πολύ μια ρίζα** στο πεδίο ορισμού της f.
7. **Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο x_o του Δ μηδενίζει τότε στο σημείο αυτό θα αλλάζει πρόσημο**. Βρίσκουμε το πρόσημό της χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας.
8. Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f ορίζεται μόνο αν η f είναι «1-1» και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε η f^{-1} έχει **το ίδιο είδος μονοτονίας**.
9. Ισχύει : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, εφόσον ορίζεται η f^{-1}.

- $f(f^{-1}(x)) = x$ Για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f, εφόσον ορίζεται η f^{-1}
- $f^{-1}(f(x)) = x$ Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, εφόσον ορίζεται η f^{-1}

10. Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}, εφόσον ορίζεται η f^{-1}, είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημορίου δηλαδή την ευθεία y= x.

Το (χ_o , ψ_o) ανήκει στην γραφική παράσταση της f $\Leftrightarrow$ $f(\chi_o)=\psi_o$ και εφόσον η f αντιστρέψιμη , $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\psi_o)=\chi_o$ $\Leftrightarrow$ το (ψ_o , χ_o) ανήκει στην γραφική παράσταση της f^{-1}.

11. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ψ=χ σε ένα σημείο τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} θα τέμνει την ψ=χ στο ίδιο σημείο.

Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} θα τέμνονται μόνο πάνω στην ψ=χ αν η f είναι γνησίως αύξουσα κάτι που δεν ισχύει αν η f <u>δεν</u> είναι γνησίως αύξουσα.

12. Αν ένας αριθμός **κ ανήκει στο σύνολο τιμών** μιας συνάρτησης f τότε η εξίσωση $f(x) = k$ θα έχει ρίζα στο πεδίο ορισμού της f, **υπάρχει x_o** στο πεδίο ορισμού της f ώστε: $f(x_o) = k$
13. Ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε α = β , εφόσον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» ή γνησίως μονότονη στο σύνολο όπου υπ΄ρχουν τα α, β.
14. Όταν μια συνάρτηση δεν είναι «1-1» τότε υπάρχουν α, β στο πεδίο ορισμού της για τα οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$ ενώ α ≠ β.

15. Αν το $\lim_{x \to x_o} f(x)$ είναι ένας θετικός ή αρνητικός αριθμός τότε <u>κοντά στο x_o</u> οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί αντίστοιχα, μια σημαντική βοήθεια όταν θέλουμε να απαλείψουμε απόλυτα ή να κάνουμε Bolzano ή …… Παρόμοια συμπεράσματα έχουμε και στις περιπτώσεις που $x \to \pm\infty$, το όριο της συνάρτησης είναι $\pm\infty$

16. Αν το $\lim_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και η συνάρτηση έχει τιμές , <u>κοντά στο x_o</u> , θετικές ή 0 τότε $\lim_{x \to x_o} f(x) \geq 0$ **(προσοχή μπορεί να είναι και 0 το όριο ακόμη και αν $f(x) > 0$ κοντά στο χ_o)**.

17. Μπορούμε να γράφουμε $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ μόνον όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_o..

18. **Όταν μας δίνεται ένα όριο μιας παράστασης, που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και μας ζητείται ένα άλλο όριο μιας διαφορετικής παράστασης που περιέχει την $f(x)$, μπορούμε να θέτουμε συνάρτηση $g(x)$ την παράσταση της οποίας γνωρίζουμε το όριό της , κοντά στο χ_o , να λύνουμε , προσέχοντας τους περιορισμούς, ως προς $f(x)$ και τέλος να αντικαθιστούμε την $f(x)$ στην δεύτερη παράσταση.**

19. Όταν μας δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_o τότε μας δίνονται τα όρια:
$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$ καθώς και το $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$, αφού η συνάρτηση θα είναι και συνεχής.

20. Όταν μας δίνεται ότι η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ψ=αχ+β τότε μας δίνονται τα όρια: $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$ **(ορισμός)** $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ και $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$

21. Αν γνωρίζουμε ότι $g(x) \leq f(x)$ κοντά στο χ_o και $\lim_{x \to x_o} g(x) = +\infty$ τότε και με δεδομένο ότι θα ισχύει $g(x) \leq f(x) < +\infty$ το συμπέρασμά μας , από το Κ.Π. θα είναι ότι $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$.
Παρόμοιο συμπέρασμα θα έχουμε και για το $-\infty$.

22. **Δεν υπάρχουν** τα όρια $\lim_{x \to \pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \to \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$. Για να απαλλαγούμε απ αυτά συνήθως χρησιμοποιούμε κριτήριο Παρεμβολής και τις σχέσεις:: $|\eta\mu x| \leq 1$, $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$, $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε χ. Η ισότητα στην **τελευταία** ανίσωση ισχύει μόνο στο 0.

23. Πολλές φορές για να βρούμε το $f(x_0)$ ενδεχομένως να χρειάζεται να υπολογίσουμε το όριό της στο χ_o. Αν f συνεχής στο x_o τότε: $f(x_o) = \lim_{x \to x_o} f(x)$.

24. Αν έχουμε ζητούμενο : « να δείξετε ότι υπάρχει x_o ώστε $f(x_0) = k$ »
Ξεκινούμε από **Bolzano , Rolle , θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, θεώρημα μέσης τιμής, Fermat**, αν όχι: **σύνολο τιμών**

25. Σε ασκήσεις με εξίσωση εφαπτομένης:
Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το σημείο επαφής $(x_o, f(x_o))$.
Αν δεν δίνεται ή δεν προκύπτει από κάποιο δεδομένο είναι καλό να ξεκινούμε υποθέτοντας ότι $(x_o, f(x_o))$ το σημείο στο οποίο εφάπτεται η ευθεία
Εξίσωση εφαπτομένης : $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$. Με συντελεστή διευθύνσεως $f'(x_o)$